Indications pour l'exercice 1.10

Pour la question 2, je vous invite à calculer $\mathbf{E}(Y \mid X = n)$, pour tout n. Vous en déduirez $\mathbf{E}(Y \mid X)$ en remplaçant dans cette formule chaque occurrence de n par X. Cela est permis par le théorème 7.1, page 19 du polycopié de cours.

Que signifie $\mathbf{E}(Y \mid X = n)$? Et comment calculer cette quantité ?

Pour définir $\mathbf{E}(Y \mid X = n)$, autant le faire dans un cadre général, afin que vous puissiez appliquer ce qui suit à des situations variées. On prend donc Z une variable aléatoire positive ou intégrable et B un événement de probabilité non nulle. On cherche à définir $\mathbf{E}(Z \mid B)$.

Le quantité $\mathbf{E}(Z \mid B)$ peut être définie de deux manières, chacune cherchant à « étendre aux espérances » la définition de la proba conditionnelle par rapport à l'événement B, c'est-à-dire $\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$ — quantité qu'on notera dans ce document $\mathbf{P}_B(A)$. Observer que l'application $\mathbf{P}_B : A \longmapsto \mathbf{P}_B(A)$ est une mesure de probabilité.

Une façon de définir $\mathbf{E}(Z \mid B)$ consiste à poser $\mathbf{E}(Z \mid B) = \frac{\mathbf{E}(Z \mathbf{1}_B)}{\mathbf{P}(B)}$. L'autre approche consiste à définir cette quantité comme l'espérance de Z si on munit $(\Omega, \mathscr{F})$ de la mesure de probabilité $\mathbf{P}_B$. Pour spécifier qu'on effectue ce calcul d'espérance par rapport à $\mathbf{P}_B$, je noterai $\mathbf{E}_B(Y)$ cette espérance, c'est-à-dire $\int_\Omega Y(\omega)\, \mathrm{d}\mathbf{P}_B(\omega)$. On pose alors $\mathbf{E}(Z \mid B) = \mathbf{E}_B(Z)$.

Il se trouve que la première et la seconde approche donnent bien le même résultat. En effet, c'est clair pour les fonctions indicatrices (pourquoi ?). Par linéarité des deux formules, c'est également valide pour les fonction étagées. Par théorème de convergence monotone, c'est alors valide pour toutes les limites simples croissantes de fonctions étagées positives : cela permet d'attraper toutes les variables aléatoires positives. Enfin, par soustraction, on déduit le cas intégrable.

Je prétends qu'avec les données de l'exercice et ce qu'on a vu à la question 1, il n'est pas très compliqué de calculer la fonction de répartition de Y vis-à-vis de la mesure de probabilité $\mathbf{P}_{\{X=n\}}$. Une fois connue la fonction de répartition, calculer l'espérance est abordable.

Quant à la question 4, on cherche h mesurable positive telle que, pour tout borélien B, on ait $\mathbf{P}(X = n, Y \in B) = \mathbf{E}\left(h(Y)\mathbf{1}_{\{Y \in B\}}\right)$. Je vous invite à trouver un h qui convient lorsque B est de la forme $]-\infty, t]$. Ensuite, il s'agira d'établir que ce h convient pour tout B : pour ce faire, employer le lemme de classe monotone.

Remarque. J'imagine que lorsque cet exercice a été posé en 2017, les correcteurs ne s'attendaient pas à obtenir des réponses justifiées de façon pleinement rigoureuse. À mon avis, l'idée générale était « on vous donne carte blanche pour extrapoler aux espérances conditionnelles ce que vous savez faire avec les espérances », le but étant alors d'aboutir aux bonnes formules. Par exemple, ici, on a l'impression d'avoir accès à une « fonction de répartition conditionnelle » : eh bien, allons-y, faisons comme si c'était une fonction de répartition tout court, calculons une espérance et on déclare que le résultat est l'espérance conditionnelle.

Ce que j'ai écrit à la page précédente permet de rendre cela rigoureux. Une théorie générale permet de légitimer systématiquement ce type de raisonnements : il s'agit de la théorie des lois conditionnelles. Sauf que les lois conditionnelles ne sont *pas* au programme de cette UE. Aussi, selon moi, c'est un exercice un peu bizarre dans le cadre de ce cours.